Concursul Fractal

A Cincea Ediție, 6 Aprilie 2025

Problema 1. Se consideră punctele A, M și B pe o dreaptă în această ordine astfel încât punctul M este mijlocul segmentului AB. Se consideră punctele C și D de aceeași parte a dreptei AB astfel încât unghiurile ACB și ADB au măsura de $90°$. Se știe că suma măsurilor în grade a unghiurilor $\angle CBA$ și $\angle DAB$ este de $40°$. Aflați măsura unghiului $\angle CMD$.

Soluție: Este clar că punctele $A, B; C$ și D se află pe semicercul de diametru AB care are centru M. Avem că suma măsurilor arcurilor AC, CD și DB a cercului este de $180°$ de grade. Dar arcul AC are măsura în grade egală cu dublul unghiului CBA, analog și pentru arcul DB. deci arcul CD are măsura egală cu $180° - 2 \cdot 40° = 100°$, care și este răspunsul.

Problema 2. Fie trei numere strict pozitive a, b, și c astfel încât $abc = 1$.Găsiți maximul expresiei:

$$\frac{1}{(a+b)^2(c+1)^2} + \frac{1}{(a+c)^2(b+1)^2} + \frac{1}{(b+c)^2(a+1)^2}$$

Soluție: Răspunsul este $\frac{3}{16}$, atins pentru $a = b = c = 1$. Vom arăta că fiecare fracție este mai mică sau egală cu $\frac{1}{16}$, ce clar implică răspunsul. Într-adevăr, folosind inegalitățile $(a+b)^2 \geq 4ab$ și $(c+1)^2 \geq 4c$ de exemplu, ce reies ambele din inegalitatea mediilor avem: $(a+b)^2(c+1)^2 \geq 4ab \cdot 4c = 16$. Aplicând inegalitățile analoage obținem răspunsul.

Problema 3. Într-un sistem de coordonate al unui plan sunt marcate toate punctele cu coordonate întregi (punctele laticeale). Fiecare punct este colorat cu una din trei culori. Arătați că există un dreptunghi cu 4 vârfuri de aceeași culoare.

Soluție: Considerăm 4 linii verticale și toate punctele laticeale de pe ele. La fiecare înălțime (coordonată y) considerăm culorile punctelor. Cum 4 puncte pot fi colorate în 3 culori într-un unmăr finit de modalități, o să fie două înălțimi la care aceste culori vor coincide. Să zicem că la prima înălțime se întâlnește de cel puțin două ori o culoare (ce neapărat trebuie să se întâmple căci avem 3 culori și 4 puncte). La a doua înălțime această culoare se va întâlni iar de 2 ori, și clar cele 4 puncte de această culoare vor forma un dreptunghi.

Problema 4. Fie a, b și c trei numere naturale nenule, pentru care considerăm șirul infinit $x_n = (a+b+c)^n - a^n - b^n - c^n$. Să se găsească în funcție de a, b și c respectiv $\gcd(x_1, x_3, x_5, x_7.....)$, unde cu gcd a fost notat cel mai mare divizor comun.

Soluție: Notăm acest divizor comun cu d. Inițial vom arăta că d se împarte la $(a+b)(a+c)(b+c)$. Într-adevăr, fie polinomul $P(x) = (b+c)(x+b)(x+c)$ și polinomul $P_n(x) = (x+b+c)^n - x^n - b^n - c^n$ pentru n impar. Este clar că $P_n(x)$ are toți coeficienții divizibili la $b+c$ și cum ambele rădăcini ale lui $P(x)$ sunt și rădăcini ale lui $P_n(x)$, $P(x)$ divide $P_n(x)$ ca polinoame cu coeficienți întregi, deci $P(a)$ divide $P_n(a)$, deci am arătat că $(a+b)(a+c)(b+c)$ îl divide pe d. La fel, cum $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(a+c)(b+c)$, rămâne să vedem dacă d este $(a+b)(a+c)(b+c)$ sau $(a+b)(a+c)(b+c)$, și răspunsul este:
a) $d = (a+b)(a+c)(b+c)$ dacă a, b și c sunt divizibile la 3 sau $(a+b)(a+c)(b+c)$ nu este divizibil la \$3.
b) $d = 3(a+b)(a+c)(b+c)$ altminteri.
Pentru soluțiile din *a*) se verifică ușor că acesta este răspunsul, iar pentru soluțiile din b avem că $\frac{x_5}{(a+b)(a+c)(b+c)}$ nu este divizibil la 3.